Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (9/8/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0001 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Cho số phức $z = \frac{10}{3-i} + i^9 + e^{-9i}$. Khi đó:

A) Rez = 3 + cos9, Imz = 2-sin9
B) Rez = 10 + cos9, Imz = -sin9
C) Rez = 3 + cos9, Imz = 2+sin9
D) Rez = 3+ cos9, Imz = -2 – sin9

Câu 2 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-3| = |z-3i|\}$, $F = \{z : |z-2+6i| < 4\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là tập bị chặn.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm 2-6i bán kính bằng 4.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 3i với 3.

Câu 3 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z - z_o| < r\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.
B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.

Câu 4 Hàm phức $f(z) = \frac{8}{z} + \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) $u = \frac{9x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{9y}{x^2+y^2}$
B) $u = \frac{9x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-7y}{x^2+y^2}$
C) $u = \frac{9x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-9y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

Câu 5 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \frac{e^z + 10z}{(z-3i)^2}$

C) $\oint_{|z-4i|=3} \frac{e^z+10z}{(z-3i)^2} dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}, 3i\right]$

D) $\oint_{|z-4|=3} \frac{e^z+10z}{(z-3i)^2} dz = 2\pi i (e^{3i}+10)$

Câu 6 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-5t} -10 $\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-5t} -10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-5t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

♦ Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p+5} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+5} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

♦ Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+5)}$

♦ Phân tích thành phân thức đơn giản: $Y = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p+9} + \dfrac{C}{p+5}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t} + Be^{-9t} + Ce^{-5t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.	**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.	**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 7</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0 < t < \pi \\ \cos 2t & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-pt}\cos 2t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ D) $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^t e^{3u} ch2u du\right] = \dfrac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

<u>Câu 8</u> Trong mặt phẳng phức cho các hàm số $u(x,y) = 10xy - 8x + 3$, $v(x,y) = 5y^2 - 5x^2 - 8y + 6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.	C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.	D) v điều hòa, u không điều hòa

<u>Câu 9</u> Cho phương trình vi phân: $y' - 8y = u(t-\pi)e^{3(t-\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 10.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 8Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{p-3} + 10$ (2)

♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{(p-3)(p-8)} + \dfrac{10}{p-8}$ (3)

♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = \dfrac{1}{5}e^{-\pi p}\left(\dfrac{1}{p-8} - \dfrac{1}{p-3}\right) + \dfrac{10}{p-8}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \dfrac{1}{5}\left(e^{8(t-\pi)} - e^{3(t-\pi)}\right)u(t-\pi) + 10e^{8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.	C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.	D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 10</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$ [af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) +bg(t)

C) $\mathscr{L}[8t + t^4e^{-3t} + \sin 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{4!}{(p+3)^4} + \dfrac{5}{p^2+25}$ D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{10p+8}{p^2-64}\right] = 10ch8t + sh8t$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p) = e^{\frac{2}{p}} - 1$ quanh điểm bất thường cô lập $p = 0$.

Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I = \oint\limits_{|z+i|=5} (e^{\frac{2}{z}} - 1)dz$.

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 5y = 3 \\ x + y' - 4y = e^{-3t} \end{cases} \text{ với điều kiện } x(0) = 0 \text{ và } y(0) = 0$$

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 8y' + 7y = 2 + \sin 3t \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 1$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✱ **Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 8 tháng 8 năm 2016

Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (9/8/2016)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (9/8/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0010 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases} 0 & khi\quad 0<t<\pi \\ \cos 2t & khi\quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và $f(t+2\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\cos 2t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u} ch2u du\right] = \dfrac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

Câu 2 Trong mặt phẳng phức cho các hàm số $u(x,y)=10xy-8x+3$, $v(x,y)=5y^2-5x^2-8y+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 3 Cho phương trình vi phân: $y'-8y = u(t-\pi)e^{3(t-\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 10.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}[y(t)]$

- ♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY-8Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{p-3}+10$ (2)
- ♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y=\dfrac{e^{-\pi p}}{(p-3)(p-8)}+\dfrac{10}{p-8}$ (3)
- ♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = \dfrac{1}{5}e^{-\pi p}\left(\dfrac{1}{p-8}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{10}{p-8}$
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \dfrac{1}{5}\left(e^{8(t-\pi)}-e^{3(t-\pi)}\right)u(t-\pi)+10e^{8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 4 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$
B) $\mathscr{L}^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$
C) $\mathscr{L}[8t+t^4e^{-3t}+\sin 5t] = \dfrac{8}{p^2}+\dfrac{4!}{(p+3)^4}+\dfrac{5}{p^2+25}$
D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{10p+8}{p^2-64}\right] = 10ch8t + sh8t$

Câu 5 Cho số phức $z = \dfrac{10}{3-i}+i^9+e^{-9i}$. Khi đó:

A) Rez = 3 + cos9, Imz = 2-sin9
B) Rez = 3 + cos9, Imz = 2+sin9
C) Rez =10 + cos9, Imz = -sin9
D) Rez = 3+ cos9, Imz = -2 – sin9

Câu 6 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E=\{z:|z-3|=|z-3i|\}$, $F=\{z:|z-2+6i|<4\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn. | C) Tập F là hình tròn đóng tâm 2-6i bán kính bằng 4.
B) Tập F là tập bị chặn. | D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 3i với 3.

Câu 7 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D=\{z:|z-z_o|<r\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.

Câu 8 Hàm phức f(z) = $\frac{8}{z}+\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{9y}{x^2+y^2}$

B) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{-7y}{x^2+y^2}$

C) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{-9y}{x^2+y^2}$

D) một kết quả khác

Câu 9 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z=3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}$

C) $\oint_{|z-4i|=3}\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2},3i\right]$

D) $\oint_{|z-4|=3}\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}dz=2\pi i(e^{3i}+10)$

Câu 10 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-5t} -10 $\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-5t} -10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-5t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p+5} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+5} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\frac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+5)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+9}+\frac{C}{p+5}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t}+Be^{-9t}+Ce^{-5t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai. | **C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng. | **D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p)=e^{\frac{2}{p}}-1$ quanh điểm bất thường cô lập $p=0$.

Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I = \oint\limits_{|z+i|=5} (e^{\frac{2}{z}} - 1)dz$.

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 5y = 3 \\ x + y' - 4y = e^{-3t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 8y' + 7y = 2 + \sin 3t \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 1$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✻ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 8 tháng 8 năm 2016

Thông qua Bộ môn Toán

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM BỘ MÔN TOÁN **ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016*** **MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE** Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0010	Họ, tên sinh viên: .... Mã số sinh viên:............................... Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: .... *Thời gian* : 90 phút (9/8/2016) **Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải. ***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.***

Giám thị 1	***Giám thị 2***
Giáo viên chấm thi 1&2	**ĐIỂM**

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (9/8/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0011 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-5t} -10 $\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-5t} -10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-5t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$
- Áp dụng công thức Borel ta được
$$Y = \frac{1}{p+5} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+5} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+5)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p+9}+\dfrac{C}{p+5}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t}+Be^{-9t}+Ce^{-5t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 2 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi\quad 0<t<\pi\\ \cos 2t & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\cos 2t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u}ch2u du\right] = \dfrac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

Câu 3 Trong mặt phẳng phức cho các hàm số $u(x,y)=10xy-8x+3$, $v(x,y)=5y^2-5x^2-8y+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 4 Cho phương trình vi phân: $y'-8y = u(t-\pi)e^{3(t-\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 10.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY-8Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{p-3}+10$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-\pi p}}{(p-3)(p-8)}+\dfrac{10}{p-8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{5}e^{-\pi p}\left(\dfrac{1}{p-8}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{10}{p-8}$

- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\frac{1}{5}\left(e^{8(t-\pi)} - e^{3(t-\pi)}\right)u(t-\pi) + 10e^{8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 5</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$ [af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) +bg(t)

C) $\mathscr{L}[8t + t^4e^{-3t} + \sin 5t] = \frac{8}{p^2} + \frac{4!}{(p+3)^4} + \frac{5}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{10p+8}{p^2-64}\right] = 10ch8t + sh8t$

<u>Câu 6</u> Cho số phức z = $\frac{10}{3-i} + i^9 + e^{-9i}$. Khi đó:

A) Rez = 3 + cos9, Imz = 2-sin9
B) Rez = 10 + cos9, Imz = -sin9
C) Rez = 3 + cos9, Imz = 2+sin9
D) Rez = 3+ cos9, Imz = -2 – sin9

<u>Câu 7</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-3| = |z-3i|\},\ F = \{z : |z-2+6i| < 4\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là tập bị chặn.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm 2-6i bán kính bằng 4.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 3i với 3.

<u>Câu 8</u> Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z - z_o| < r\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.

<u>Câu 9</u> Hàm phức f(z) = $\frac{8}{z} + \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{9y}{x^2+y^2}$
B) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{-7y}{x^2+y^2}$
C) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{-9y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

<u>Câu 10</u> Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \frac{e^z + 10z}{(z-3i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-4i|=3} \frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}, 3i\right]$

D) $\oint\limits_{|z-4|=3} \frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i(e^{3i} + 10)$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p) = e^{\frac{2}{p}} - 1$ quanh điểm bất thường cô lập $p = 0$.

Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I = \oint\limits_{|z+i|=5} (e^{\frac{2}{z}} - 1)dz$.

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 5y = 3 \\ x + y' - 4y = e^{-3t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$y'' + 8y' + 7y = 2 + \sin 3t$ với điều kiện $y(0) = 0$ và $y'(0) = 1$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 8 tháng 8 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr>
<td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0011</td>
<td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (9/8/2016)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td>
</tr>
<tr>
<td>Giám thị 1</td>
<td>Giám thị 2</td>
</tr>
<tr>
<td>Giáo viên chấm thi 1&2</td>
<td>ĐIỂM</td>
</tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (9/8/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-1000 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Trong mặt phẳng phức cho các hàm số $u(x,y)=10xy-8x+3$, $v(x,y)=5y^2-5x^2-8y+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z=3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^z+10z}{(z-3i)^2}$

C) $\displaystyle\oint_{|z-4i|=3}\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2},3i\right]$

D) $\displaystyle\oint_{|z-4|=3}\frac{e^z+10z}{(z-3i)^2}dz=2\pi i(e^{3i}+10)$

Câu 3 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-5t}-10$\displaystyle\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-5t}-10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
  $$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-5t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$
- Áp dụng công thức Borel ta được
  $$Y=\frac{1}{p+5}-10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y=\frac{1}{p+5}-10Y\frac{p}{p^2+9}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+5)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p+9}+\dfrac{C}{p+5}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t}+Be^{-9t}+Ce^{-5t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 4 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\displaystyle\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi\quad 0<t<\pi\\ \cos 2t & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\displaystyle\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-pt}\cos 2t\,dt$

C) $\displaystyle\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$

D) $\displaystyle\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u}ch2u\,du\right]=\frac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

Câu 5 Cho phương trình vi phân: $y'-8y = u(t-\pi)e^{3(t-\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 10.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 8Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{p-3} + 10$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-\pi p}}{(p-3)(p-8)} + \dfrac{10}{p-8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{5}e^{-\pi p}\left(\dfrac{1}{p-8} - \dfrac{1}{p-3}\right) + \dfrac{10}{p-8}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{5}\left(e^{8(t-\pi)} - e^{3(t-\pi)}\right)u(t-\pi) + 10e^{8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 6 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$ [af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)
B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) +bg(t)
C) $\mathscr{L}[8t + t^4e^{-3t} + \sin 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{4!}{(p+3)^4} + \dfrac{5}{p^2+25}$
D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{10p+8}{p^2-64}\right] = 10ch8t + sh8t$

Câu 7 Cho số phức z = $\dfrac{10}{3-i} + i^9$ + e^{-9i} . Khi đó:

A) Rez = 3 + cos9, Imz = 2-sin9
B) Rez = 3 + cos9, Imz = 2+sin9
C) Rez =10 + cos9, Imz = -sin9
D) Rez = 3+ cos9, Imz = -2 – sin9

Câu 8 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-3| = |z-3i|\}$, $F = \{z : |z-2+6i| < 4\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là tập bị chặn.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm 2-6i bán kính bằng 4.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 3i với 3.

Câu 9 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z - z_o| < r\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.
B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.

Câu 10 Hàm phức f(z) = $\dfrac{8}{z} + \dfrac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{9y}{x^2+y^2}$
B) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-7y}{x^2+y^2}$
C) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-9y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (*1,5 điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p) = e^{\frac{2}{p}} - 1$ quanh điểm bất thường cô lập $p = 0$.

Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I = \oint\limits_{|z+i|=5} (e^{\frac{2}{z}} - 1)dz$.

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 5y = 3 \\ x + y' - 4y = e^{-3t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$y'' + 8y' + 7y = 2 + \sin 3t$ với điều kiện $y(0) = 0$ và $y'(0) = 1$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✻ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 8 tháng 8 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ III NĂM HỌC 2015-2016
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 2016-0003-1008-0304-1000</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (9/8/2016)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi**:** **9**/8/2016)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 2016-0003-1008-0304-1000

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	D	B	B	A	C	A	C	D	C

Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0001

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	A	C	D	C	D	B	B	B	A	C

Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0010

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	B	A	C	A	C	D	C	D	B

Mã đề: 2016-0003-1008-0304-0011

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	B	B	A	C	A	C	D	C	D

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	**Nội dung**	*Điểm*
Câu 11		**1,5 điểm**
	Khai triển Laurent Ta có: $e^{\frac{2}{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{2}{p})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!\,p^n}$	0,25đ
	$F(p) = e^{\frac{2}{p}} - 1 = = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!\,p^n} = \underbrace{0}_{\text{Phần đều}} + \underbrace{\frac{2}{p} + \frac{2^2}{2!\,p^2} + \frac{2^3}{3!\,p^3} \ldots}_{\text{Phần chính}}$ Vì phần chính có vô số số hạng nên $p = 0$ là điểm bất thường cốt yếu.	0,25đ

Tìm gốc của $F(p)$: $F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!\,p^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n-1)!}{n!(n-1)!\,p^{(n-1)+1}}$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(n-1)!}\frac{(n-1)!}{p^{(n-1)+1}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t^{n-1}}{n!(n-1)!}$$ 0,5đ

Tính tích phân: Vì hàm số $f(z)=e^{\frac{2}{z}}-1$ giải tích trên $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ và đường tròn $|z+i|=5$ bao quanh điểm bất thường cô lập $z=0$ nên áp dụng thặng dư ta được

$$I=\oint_{|z+i|=5}(e^{\frac{2}{z}}-1)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[e^{\frac{2}{z}}-1,0]=2\pi i\times 2=4\pi i$$ 0,5đ

Câu12 — 1,5đ

Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases}\mathscr{L}[x']+5\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[3]\\ \mathscr{L}[x]+\mathscr{L}[y']-4\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[e^{-3t}]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}pX+5Y=\dfrac{3}{p}\\ X+(p-4)Y=\dfrac{1}{p+3}\end{cases}$$ **0.5đ**

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X=\dfrac{3p^2-8p-36}{p(p+3)(p+1)(p-5)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+3}+\dfrac{C}{p+1}+\dfrac{D}{p-5}\\ Y=\dfrac{p^2-3p-9}{p(p+3)(p+1)(p-5)}=\dfrac{E}{p}+\dfrac{F}{p+3}+\dfrac{G}{p+1}+\dfrac{H}{p-5}\end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được: **0.5đ**

$$\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[X]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[Y]\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p}+B\dfrac{1}{p+3}+C\dfrac{1}{p+1}+D\dfrac{1}{p-5}]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[E\dfrac{1}{p}+F\dfrac{1}{p+3}+G\dfrac{1}{p+1}+H\dfrac{1}{p-5}]\end{cases}$$

$$\Leftarrow\begin{cases}x=A+Be^{-3t}+Ce^{-t}+De^{5t}\\ y=E+Fe^{-3t}+Ge^{-t}+He^{5t}\end{cases}$$ **0.5đ**

- Tìm A,B,C,D dựa vào

$$\frac{3p^2-8p-36}{p(p+3)(p+1)(p-5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-5}$$

$$A=\frac{3\times0^2-8\times0-36}{(0+3)(0+1)(0-5)}=\frac{12}{5},\quad B=\frac{3\times(-3)^2-8(-3)-36}{(-3)(-3+1)(-3-5)}=-\frac{5}{16},$$

$$C=\frac{3(-1)^2-8\times(-1)-36}{(-1)(-1+3)(-1-5)}=-\frac{25}{12},\quad D=\frac{3(5)^2-8(5)-36}{5(5+3)(5+1)}=-\frac{1}{240}$$

♦ Tìm E,F,G,H dựa vào

$$\frac{p^2-3p-9}{p(p+3)(p+1)(p-5)}=\frac{E}{p}+\frac{F}{p+3}+\frac{G}{p+1}+\frac{H}{p-5}$$

$$E=\frac{0^2-3\times 0-9}{(0+3)(0+1)(0-5)}=\frac{3}{5},F=\frac{(-3)^2-3\times(-3)-9}{(-3)(-3+1)(-3-5)}=-\frac{3}{16},$$

$$G=\frac{(-1)^2-3\times(-1)-9}{(-1)(-1+3)(-1-5)}=-\frac{5}{12},\ H=\frac{5^2-3\times 5-9}{5(5+3)(5+1)}=\frac{1}{240}$$

Câu 13 **2đ**

Đặt $Y=Y(p)\ =\ \mathscr{L}[\mathrm{y(t)}]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y-py(0)-y'(0)+8(pY-y(0))+7Y\ =\ \mathscr{L}[2+\sin 3t]$$ **0.5đ**

$$\Leftrightarrow Y(p^2+8p+7)=\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2+9}+1$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{p^3+2p^2+12p+18}{p(p+1)(p+7)(p^2+9)}$$ **0.25đ**

Phân tích thành phân thức đơn giản

$$Y=\frac{p^3+2p^2+12p+18}{p(p+1)(p+7)(p^2+9)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+7}+\frac{Dp+3E}{p^2+9}$$ **0.25đ**

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t)=\ \mathscr{L}^{-1}[Y]\ =\ \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+1}+C\frac{1}{p+7}+D\frac{p}{p^2+9}+E\frac{3}{p^2+9}]$$

$$\Leftrightarrow y(t)=\ A+Be^{-t}+Ce^{-7t}+D\cos 3t+E\sin 3t$$

0.5đ

Tìm A,B,C,D,E dựa vào đẳng thức:

$$\frac{p^3+2p^2+12p+18}{p(p+1)(p+7)(p^2+9)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+7}+\frac{Dp+3E}{p^2+9}$$

$$A=\frac{0^3+2\times 0^2+12\times 0+18}{(0+1)(0+7)(0^2+9)}=\frac{2}{7},\quad B=\frac{(-1)^3+2\times(-1)^2+12\times(-1)+18}{(-1)(-1+7)((-1)^2+9)}=-\frac{7}{60}$$

$$C=\frac{(-7)^3+2\times(-7)^2+12\times(-7)+18}{(-7)(-7+1)((-7)^2+9)}=-\frac{311}{2436}$$

Từ đẳng thức (*)

$$\begin{cases} Cho \quad p=1: & \dfrac{33}{160}=\dfrac{A}{1}+\dfrac{B}{1+1}+\dfrac{C}{1+7}+\dfrac{D+3E}{1^2+9} \\ Cho \quad p=-2: & \dfrac{3}{65}=\dfrac{A}{-2}+\dfrac{B}{-2+1}+\dfrac{C}{-2+7}+\dfrac{-2D+3E}{(-2)^2+9} \end{cases}$$

Thay $A=\frac{2}{7}, B=-\frac{7}{60}, C=-\frac{311}{2436}$ vào hệ trên rồi giải tìm D, E ta được

$D=-\frac{6}{145}, E=-\frac{3}{290}$

Vậy nghiệm phương trình vi phân là

$$y(t)=\frac{2}{7}-\frac{7}{60}e^{-t}-\frac{311}{2436}e^{-7t}-\frac{6}{145}\cos 3t-\frac{3}{290}\sin 3t$$

b)

Cách giải tổng quát như sau: $y(t)= A+Be^{-t}+Ce^{-7t}+D\cos 3t+E\sin 3t$

Vì $\lim\limits_{t\to+\infty}(Be^{-t}+Ce^{-7t})=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân

0.5đ

$$y(t)\approx A+D\cos 3t+E\sin 3t=A+\sqrt{D^2+E^2}\left(\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\cos 3t+\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\sin 3t\right)$$

Đặt $\sin\alpha=\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}, \cos\alpha=\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}$

$$y(t)\approx A+\sqrt{D^2+E^2}(\sin\alpha\cos 3t+\cos\alpha\sin 3t)=A+\sqrt{D^2+E^2}\sin(3t+\alpha)$$

Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian t có biên độ dao động $\sqrt{D^2+E^2}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o=A=\frac{2}{7}$.

*** HẾT***